Sulla natura paradossale del continuo

Niccolò Argentieri
(Università di Roma "Tor Vergata")

Abstract
On the paradoxical nature of continuity. Zeno's paradoxes are still able to produce philosophical energy. We focus attention on two of them, the so-called *arrow* and the *big/small*. They are usually classified in different topics – against motion and against multiplicity, respectively – but they are grounded on a common problem, which we could designate as the problem of giving the right answer to the question: what is continuity *made of*?
In order to improve the understanding of this question, the paper will bring into play five crucial stages in the reception of Zeno's challenge: Aristotle's answer to Zeno's Paradoxes, the obstacles met by Galileo in treating the motion problem, the foundation of infinitesimal calculus, Cohen's understanding of this foundation from a Kantian point of view, the formal definition of continuity in Dedekind's and Cantor's work.
Finally, I'll try to identify a common core for these five building elements in the development of rational knowledge. In other words, I'll propose a *philosophical* answer – not a *mathematical* one, therefore, and neither, perhaps, an answer *tout court*: an answer that doesn't expect to solve Zeno's Paradoxes, but to seize their fundament, perhaps even to exhibit a content of truth, of course within the limits set by the nature of the problem.

Keywords: *Zeno*, *Mathematics*, *Paradoxes*, *Continuity*, *Galilei*, *motion*, *Aristotle*.

«17 dicembre. A una domanda urgente se nulla stesse fermo Zenone rispose:
Sì, sta ferma la freccia in volo»
[F. Kafka, *Diari*]

1. L'eco della sfida lanciata da Zenone alla razionalità non si è ancora spenta. Dei paradossi si parla ancora, e non soltanto come virtuosismi di matematici creati per stupire e catturare l'attenzione dei profani, bensì come veri e propri scandali logici, quasi che la situazione di stallo in cui Zenone ha posto Achille e la freccia funzionasse come una reazione nucleare in grado di produrre ancora, e per chissà quanto tempo, energia filosofica: i libri dedicati ai paradossi di Zenone hanno molto successo – anche dopo, dettaglio evidentemente significativo, che per i paradossi sia stata annunciata una qualche forma di *soluzione*, più o meno convincente, più o meno conclusiva[1].

Il fatto è che i paradossi di Zenone non sono problemi matematici, non sono enigmi che attendono una soluzione, non è questa la loro natura. E anche gli straordinari progressi linguistici e concettuali della matematica, nati a volte proprio per gestire l'ambito di difficoltà che ruota attorno ai temi tipicamente coinvolti dagli argomenti zenoniani (il moto, le proprietà locali dello spazio, il tempo, l'infinito), pur offrendo la possibilità di formulazioni più rigorose, più esatte, delle sfide di Zenone, non possono essere considerati strumenti per risposte complete e definitive. Perché troppi secoli separano le parole di Zenone da queste nuove formulazioni e perché troppo fondamentali sono le questioni in gioco per consentire una soluzione puramente linguistica. Non è direttamente alla matematica che Zenone parla – anche se, come vedremo, la matematica ha un ruolo importante, direi esemplare, nella comprensione e perfino nella costruzione dei paradossi: penso, in particolare, alla lunga riflessione sui fondamenti che prende le mosse dalla costruzione del calcolo infinitesimale e si conclude con l'opera decisiva di Dedekind e Cantor. Così come centrale è l'impegno della fisica per la concettualizzazione del movimento. Ovviamente, questa posizione di crocevia tra diverse discipline, e il radicamento plurale dei problemi che i paradossi sollevano, non possono essere ridotti o eliminati – almeno non in termini greci. Dovremo però tenerne conto con attenzione perché, alla luce della codificazione formale delle specializzazioni disciplinari, rischiano di creare alcune difficoltà linguistiche che sarà bene non trascurare.

Vorrei concentrare l'attenzione su due dei *lògoi* attribuiti a Zenone. Sono quelli conosciuti come "argomento della freccia" (d'ora in

[1] Si veda, ad esempio, «Le Scienze», n. 317, 1994, pp. 60-66.

poi *freccia*) e "argomento del grande e del piccolo" (d'ora in poi *grande/piccolo*). Sono due ragionamenti esemplari, soprattutto in vista della lettura che intendo proporre, perché sembrano riassumere con grande precisione le fondamentali questioni chiamate in causa. È chiaro che un progetto eminentemente filologico o tecnico riguardante i paradossi di Zenone richiederebbe un'indagine attenta soprattutto alle differenze, e alle eventuali incoerenze, tra un argomento e l'altro, anche lì dove sembra di percepire somiglianze e analogie. Non è questo tuttavia l'approccio che intendo proporre, soprattutto per ragioni di competenza, e sarà dunque sufficiente affidarsi ai due argomenti citati come rappresentanti particolarmente significativi di un determinato contesto teorico.
Iniziamo con una loro formulazione[2]. Per la *freccia*:

> L'argomento di Zenone, partendo dalla premessa che tutto ciò che occupa uno spazio uguale a sé stesso o è in moto o è in quiete, che niente si muove nell'istante e che il mobile occupa sempre in ciascun istante uno spazio uguale a sé stesso, sembra snodarsi in questo modo: la freccia in moto ad ogni istante occupa uno spazio uguale a sé stessa, e così per tutto il tempo del suo moto. Ma ciò che in un istante occupa uno spazio uguale a sé stesso non si muove, perché niente si muove nell'istante. Quindi la freccia in moto, finché è in moto, non si muove per tutto il tempo del suo moto[3].

Per il *grande/piccolo*:

> Se gli esseri sono molti: se l'essere non ha estensione, l'essere non è nulla e gli esseri sono piccoli fino a non possedere grandezza; se l'essere ha estensione, gli esseri sono grandi così da non essere definiti[4].

---

[2] Le fonti per la ricostruzione degli argomenti di Zenone sono sostanzialmente quattro: alcune pagine isolate della *Fisica* di Aristotele; pochissimi frammenti autentici; la parte introduttiva del *Parmenide* di Platone; il *Commento alla Fisica di Aristotele* di Simplicio. Da un punto di vista rigorosamente filologico, il riferimento è senz'altro G. Colli, *Zenone di Elea*, Milano 2011 (1998).

[3] Tratto dal commento di Simplicio, in *Aristotelis Physica*, rec. W.D. Ross, Oxonii 1956 (1936).

[4] G. Colli, *Zenone*, cit., p. 91.

Per quanto riguarda questo secondo argomento, la cui versione originaria è sostanzialmente perduta, si rimanda al lavoro di Colli e alla ricostruzione proposta in quella sede[5]. Conviene però darne conto anche in termini meno rigorosi dal punto di vista filologico. Si tratta, secondo la formulazione più usata nelle trattazioni contemporanee – una formulazione che mi pare colga l'essenziale del *lògos* zenoniano – del problema legato al carattere estensionale dei punti che compongono un segmento. Entrambe le opzioni disponibili (estensione nulla o estensione finita dei punti) conducono a conseguenze inaccettabili: somma zero, dunque inesistenza dell'essere, oppure somma infinita, dunque indefinitezza dell'essere.

I due argomenti sono di solito assegnati a categorie differenti: quella degli argomenti contro il movimento per la *freccia*, quella degli argomenti contro il molteplice per il *grande/piccolo*. Tuttavia, per molti versi, essi poggiano su un fondamento comune, nel quale si intrecciano molte delle questioni che Zenone dispone sul tavolo, dalla possibilità logica del movimento alla concettualizzazione di spazio e tempo. Con una sfumatura più temporale nel caso della freccia in moto eppure immobile, con una più marcata tendenza geometrica nel caso dei punti infinitamente grandi e infinitamente piccoli, la domanda che tiene insieme le due aporie potrebbe essere così formulata: *di cosa è fatto il continuo?*

2. Quale via d'accesso alla trattazione vera e propria, provo a suggerire un elenco delle possibili motivazioni alla base della costruzione degli argomenti zenoniani. Più esattamente, si tratta di un breve e incompleto catalogo delle conseguenze teoriche del caso Zenone, un'indagine su ciò che non è esplicitamente affermato nel testo. Non, dunque, la rivelazione degli obiettivi espliciti o dichiarati di Zenone – in fondo un parziale accordo sul ruolo assegnato agli argomenti dal loro autore sembra raggiunto, e lo ricorderemo come primo punto di questo elenco – quanto un tentativo di valutare il materiale di cui è costituita la fucina di energia filosofica di cui abbiamo parlato, quali sono le domande che i *lògoi* di Zenone incessantemente continuano a produrre, anche, com'è inevitabile, una volta

[5] Ivi, pp. 83-98.

che si siano resi autonomi dalle intenzioni effettive dell'autore. Vediamo.

a. L'obiettivo primario di Zenone era quasi certamente quello di mostrare la natura aporetica della concezione che difende la realtà del movimento e del divenire – una concezione che appare più ragionevole, e più rispettosa dell'immediata esperienza percettiva, rispetto a quella parmenidea. È un aspetto essenziale della tesi che vorrei provare a sostenere: Zenone sembra far emergere l'esito *necessariamente* paradossale della concettualizzazione del tratto più essenziale della nostra esperienza, vale a dire la sua essenza temporale, incarnata dal mutamento e dai fenomeni dinamici. Si tratterà di vedere se questo esito logico e formale del ragionamento non sia il riflesso di una difficoltà, o qualità, più profonda e originaria.
b. Da questo punto di vista, gli esercizi di Zenone portano a riconoscere l'inadeguatezza epistemologica della percezione sensibile, perché i sensi propongono come evidente ciò che la ragione dichiara invece contraddittorio, dunque falso, o illusorio.
c. Viceversa, rovesciando la prospettiva, è il linguaggio a rivelare la propria vaghezza, non riuscendo a dar conto di un'evidenza percettiva che appare certa e priva di ambiguità. Nelle parole di Colli: «Può darsi invece che Zenone non voglia contestare la possibilità del movimento reale sensibile (da cui deriverebbe una condanna dei sensi), ma che il movimento sia per lui ben reale, e che lo scopo di queste aporie sia la constatazione dell'incapacità della ragione umana di spiegare razionalmente quello che i sensi ci offrono»[6].
d. In generale, anche prescindendo da qualsiasi gerarchia riguardo all'affidabilità epistemologica, è indubbio che gli argomenti di Zenone contro il movimento e il molteplice pongono il problema del dualismo – virtuale o reale, gnoseologico o ontologico – tra percezione e linguaggio, tra esperienza e immaginazione. Non necessariamente i para-

[6] Ivi, p. 101.

dossi affermano tale dualismo; certamente, tuttavia, fondano una descrizione del processo conoscitivo che porta alla costituzione della polarità mondo/linguaggio (e delle sue articolazioni) come un dato primario del problema gnoseologico. Un dualismo destinato a svolgere un ruolo decisivo nella filosofia moderna, almeno fino a Kant. Nei termini della fenomenologia husserliana, gli argomenti di Zenone favoriscono il costituirsi di un tassello fondamentale dell'atteggiamento naturale, un'inerzia del pensiero che è importante riconoscere e depotenziare.

e. Da una prospettiva storica, più globale, Zenone annuncia e codifica una prima importante crisi della razionalità occidentale, strettamente connessa alla scoperta dell'incommensurabilità e degli irrazionali – come se l'infinito attuale, che il prudente rigore del pensiero greco teneva fuori dai confini del discorso razionale, finisse ugualmente per contaminare i concetti e le costruzioni della logica. Tale crisi agisce come stimolo per una progressiva riorganizzazione dell'idea del continuo spazio-temporale. Dunque per la determinazione concettuale dell'*apriori* sensibile, proseguita poi con le innovazioni tecnologiche tardo-medievali, con gli studi rinascimentali sulla prospettiva, con la nascita della scienza moderna, con il passaggio al Novecento.

f. Con riferimento alla definizione aristotelica di moto («atto dell'essere in potenza in tanto che è in potenza»), Koyré afferma che essa «esprime mirabilmente bene il fatto che il moto è l'essere – l'atto – di ciò che non è Dio»[7]. Dunque, il movimento e il mutamento, e il tempo stesso, si configurano come un'imperfezione, locale, connessa a una mancanza. In altre parole, come un dato essenziale della natura umana. Di conseguenza, un altro effetto del gesto di Zenone consiste nel ribadire il dualismo parmenideo tra *locale* (il soggetto/ego, centro del mondo, che rende possibile il movimento, o, almeno, la sua esperienza) e *globale* (l'Essere, estraneo

[7] A. Koyré, *Etudes galiléennes*, Paris 1966; trad. it. di M. Torrini, *Studi galileiani*, Torino 1976, pag. 15.

alle vicende gnoseologiche del soggetto, che dichiara illusione l'esperienza percettiva del movimento). In altri termini, dalla sfida zenoniana deriva la possibilità di far valere una contrapposizione dinamica tra l'esperibilità (locale) del moto e l'immutabilità (ontologica, logica, globale) dell'Essere.
Così, la realtà percettiva del movimento convive col suo carattere illusorio o apparente, in quanto connesso strettamente ai caratteri e ai limiti della struttura percettiva del soggetto. Si tratta, potremmo dire, di una forma di ribaltamento assiologico del paradigma kantiano e della dualità tra *fenomeno* e *cosa in sé*[8].

3. Affiderò dunque a questa costellazione di effetti dei paradossi di Zenone, in particolare alle articolazioni della dualità tra locale e globale – un dualismo topologico che certo non combacia senza residui con quello tra discreto e continuo – la funzione di filo conduttore per attraversare e ridefinire le aporie zenoniane. Il sapere del continuo oscilla, infatti, tra una concezione globale – perché la corda, la linea, il gesto, la corsa, le figure che incarnano la nostra intuizione del continuo, richiedono uno sguardo che ne abbracci la totalità – e una locale – perché la descrizione razionale della continuità sembra implicare l'esigenza di *dire* la qualità locale del continuo, per esempio la infinita divisibilità, senza perderne l'essenza. Anche la priorità ontologica o gnoseologica spesso riconosciuta al continuo – quale *Gestalt* primaria, sfondo indeterminato su cui la conoscenza staglia delle figure (discrete) di senso – ne conferma la

[8] Mi sembra molto interessante, in questo senso, il ritorno di tale dualismo nell'ambito della fisica fondamentale, così come con successo, e certo non senza difficoltà e questioni aperte, è stato espresso da Rovelli nel suo recente libro, dedicato al ruolo della variabile tempo nelle teorie fisiche (C. Rovelli, *L'ordine del tempo*, Milano 2017). Nella prospettiva di Rovelli, il tempo e il mutamento sembrano configurarsi come esito di un attrito, una sfocatura, una limitatezza del punto di vista che caratterizza il rapporto sensibile-intellettuale del soggetto con la realtà. E lì dove questo attrito soggettivo viene meno, lì dove domina un'oggettività assoluta, vale a dire nel livello fondamentale della fisica, la variabile tempo appare destinata a svanire come un residuo metafisico, quasi come un errore.

natura topologica, globale. Mentre la trattazione infinitesimale della continuità consisterà proprio in una rigorosa indagine locale.

Ecco, vorrei far valere questa ambivalenza costitutiva del continuo come chiave di accesso all'analisi di cinque passaggi storici: la risposta aristotelica ai paradossi di Zenone, le difficoltà di Galilei nella trattazione del problema del moto, la fondazione del calcolo infinitesimale, la lettura di tale fondazione in termini kantiani così come formulata da Cohen, la definizione formale del continuo nell'opera di Dedekind e Cantor. Si tratta di cinque snodi centrali per l'evoluzione della ragion pura, nei quali i paradossi di Zenone e i loro effetti giocano un ruolo particolarmente importante.

In sede di conclusione, proverò poi a valutare la possibilità di individuare un tratto comune negli esiti di queste brevi drammaturgie. Proporrò, in altri termini, una soluzione *filosofica* – dunque non una soluzione matematica, fisica o logica, né, propriamente parlando, una soluzione *tout court* – la quale, come tale, non intende *risolvere* i paradossi di Zenone, bensì coglierne il fondamento, forse persino esibirne un contenuto di verità, sia pure nei limiti stabiliti dalla natura del problema.

4. Inevitabilmente, la prima scena che dobbiamo rievocare vede protagonista Aristotele, perché Aristotele rappresenta la fonte principale per i testi di Zenone e, al tempo stesso, la prima reazione, il primo tentativo di elaborare una via d'uscita dalla trappola.

Leggiamo dunque l'esposizione dell'argomento della freccia nella formulazione di Aristotele; una formulazione molto importante, perché contiene anche la strategia aristotelica per il superamento dell'aporia:

> Terzo è quello di cui si è fatto ora cenno, che la freccia in movimento sta ferma. Esso si fonda sulla premessa che il tempo è composto di attimi. Infatti se non si ammette questo non si può fare il sillogismo.[9]
> […] Zenone commette un paralogismo[10]; se infatti, dice, ogni cosa è in quiete quando occupa uno spazio uguale a sé, e se il mobile è sempre nel

[9] Aristotele, *Fisica*, 239 b 30 sgg.; utilizzo la traduzione che dà Colli nel testo citato.

[10] «*Paraloghìzetai*»: Zenone sbaglia, ragiona male. Aristotele non espone il paradosso per riconoscerlo come tale, ma per mostrarlo come conseguenza di un ragionamento viziato da un errore.

momento attuale, la freccia che si muove è ferma. Ciò è falso: *infatti il tempo non è composto dagli attimi presenti indivisibili, come pure nessun'altra grandezza.*[11]

Risulta evidente in cosa consista, per Aristotele, l'errore del ragionamento di Zenone: c'è un'ingiustificata, illegittima asimmetria nel trattamento dello spazio e del tempo; e la trappola di Zenone scatta proprio a causa di questa asimmetria, perché l'intuizione dello spazio e del tempo sembra giustificare due diverse procedure concettuali. Come accade anche nell'argomento della dicotomia e nell'Achille, il ragionamento attribuisce allo spazio la possibilità di una suddivisione infinita, e la convergenza, dunque il valore finito, della somma di questi infiniti intervalli. Diverso è il caso del tempo, perché la granularità insuperabile della forma (l'istante) rende inevitabile l'esplosione all'infinito del tentativo di ricomposizione. Così, sommando gli infiniti intervalli che separano Achille dalla tartaruga si ottiene un valore finito (la distanza iniziale tra i due contendenti), mentre la somma dei tempi necessari a percorrere ognuno di quegli intervalli è concepita come inevitabilmente infinita.

Ebbene, la risposta di Aristotele a Zenone consiste proprio nel rifiutare questa asimmetria, dunque nel negare la premessa principale, sia pure occulta, dell'argomento. L'infinita suddivisione, sembra sostenere Aristotele, riguarda entrambi, perché entrambi si presentano come forme del continuo. E la suddivisione indefinita è una proprietà essenziale del continuo: «non c'è nulla di assurdo nell'assumere che in un tempo infinito si attraversino infinite parti; l'infinito afferisce nello stesso modo alla lunghezza e al tempo»[12].

Tuttavia, questa correzione rappresenta soltanto la prima mossa, perché Aristotele comprende immediatamente i rischi insiti in questa caratterizzazione del continuo. Una suddivisione infinita effettivamente portata a termine significherebbe, infatti, la negazione della stessa nozione che si sta cercando di caratterizzare. Da qui, la natura rigorosamente potenziale di questa operazione di suddivisione:

[11] Aristotele, *Fisica*, 239 b 5 sgg.
[12] Aristotele, *Fisica*, 263 a13-15.

> […] in ciò che è continuo sono sì presenti infinite metà, però non in atto, bensì in potenza. Se si pongono metà in atto, non si produrrà un movimento continuo, bensì si produrrà arresto: proprio questo è chiaro che risulta nel caso di chi conti la metà […]. Sicché a chi domanda se è possibile attraversare infinite (parti) o nel tempo o nella lunghezza, si deve rispondere che in un senso è possibile, in un senso no. Se sono infinite in atto, non è possibile, se sono in potenza, è possibile. Infatti, chi si muove in modo continuo ha attraversato per accidente infinite parti, ma in senso assoluto no: *è accidentale per la linea essere infinite metà, ma è altro la sostanza e l'essere della linea*.[13]

È come se, per chiamare in causa la chiave di lettura offerta dalla dualità tra locale e globale, trovassimo qui esposta la necessità di impedire che la proprietà locale del continuo, la sua trattazione quantitativa, si trasformi nella negazione della stessa continuità, vale a dire nella sua discretizzazione. Il modo d'essere del continuo, la possibilità della indefinita suddivisione, ne implica la negazione: un paradosso, verrebbe da dire, che Aristotele invita a evitare mantenendosi al di qua dell'effettiva realizzazione di ciò che deve restare una pura possibilità. In altri termini, il continuo è colto nel suo ruolo di condizione di possibilità di un'operazione concettuale; ma si sgretolerebbe se questa operazione fosse pensata come inerente alla definizione stessa di quella condizione in quanto oggetto di predicazione. Appena si prova a spostare lo sguardo nel locale – nel punto, nell'istante – il continuo e il movimento sembrano andare perduti.

Ecco dunque il lascito di questa prima scena: la sensazione che il continuo rischi di perdersi se affrontato fino in fondo con gli strumenti linguistici e aritmetici della quantificazione, inevitabilmente discretizzanti. Sembra che il continuo goda di un particolare *status*, per cui l'attribuzione di proprietà rischia di coincidere con il dissolversi della nozione stessa. La fondazione e la concettualizzazione del *continuo*, che pare coincidere con il passaggio da Zenone ad Aristotele – perché Zenone costringe a parlare del continuo, forzando così la tematizzazione, e dunque l'ipostastatizzazione, di un'entità dallo *status* non del tutto oggettuale – rappresenta anche l'emergere dei paradossi. E la cautela di Aristotele, del tutto conforme a quella

[13] Aristotele, *Fisica*, 263 a4-b9; corsivo mio.

che il pensiero greco manifesta nei confronti dell'infinito attuale, risponde a questa esigenza di far sì che il continuo resti continuo.

5. Galilei occupa il centro di una scena di vertiginosa complessità, nella quale interagiscono, non solo metaforicamente, tre eventi. Accanto, appunto, al lunghissimo, secolare processo di ricerca della corretta interpretazione della caduta dei corpi – culminato nella individuazione delle prima e fondamentale legge della meccanica, opera del genio di Galilei nel 1604, che chiude tale processo fondando al tempo stesso la nuova fisica matematica – troviamo la creazione del calcolo infinitesimale (indispensabile strumento per tentare di superare le tenaci resistenze che il movimento oppone alla propria descrizione e nuovo, più maturo tentativo di cogliere nel locale l'essenza della continuità) per opera di Newton e Leibniz, e poi la grande architettura della filosofia trascendentale, che, come ora vedremo, stabilisce un legame molto profondo, soprattutto nella prospettiva della lettura neokantiana, con il nuovo strumento dell'analisi matematica. Tre eventi evidentemente caratterizzati da una complessità storica e concettuale molto difficile da gestire. Probabilmente impossibile. Tuttavia, credo valga la pena riflettere sul loro accostamento, perché insieme costituiscono una straordinaria celebrazione della forza che Zenone ha liberato.

Iniziamo con Galilei, che, in prima istanza, si pone in più palese connessione con la scena primaria della freccia.

La riflessione che porta Galilei alla corretta formulazione della caduta dei corpi, prima e fondamentale legge della nuova meccanica, impegna Galilei dagli anni giovanili fino alle opere della maturità. Ci sono ostacoli molto impegnativi sulla strada da percorrere: lo sfondo metafisico, diciamo il macrocosmo e il microcosmo aristotelici, e la matematizzazione, che geometrizza sempre e dunque tende in prima istanza a privilegiare lo spazio e a riconoscere solo a fatica il ruolo centrale del tempo come più efficace variabile indipendente per la formulazione analitica della legge. (Il legame tra velocità e spazio percorso caratterizza le prime formulazioni, errate, della legge di caduta). Questi ostacoli sono in un modo o nell'altro superati, e Galilei giunge al passaggio decisivo, che consiste nel connettere la variazione della velocità di caduta al trascorrere del tempo e non, come accaduto fino ad allora, all'allontanamento spaziale dal punto iniziale della caduta: «E così ci sembra di non discordare affatto dalla retta ragione se ammettiamo che *l'intensità della velocità* cresca secondo l'estensione del tempo».[14]

Ora, la definizione galileiana del moto implica un aumento *continuo* della velocità, a partire dalla quiete, dunque il fatto che il corpo «passa attraverso tutti i gradi di velocità e tardità». Questo sembra implicare il fatto che la velocità, avvicinandosi ai primi istanti del moto, debba tendere a un valore sempre più prossimo allo zero, dunque a un'infinita lentezza. Una circostanza che appariva strana e inverosimile a Galilei e ai più acuti osservatori contemporanei:

> La mente umana non è in grado di comprendere come sia possibile che un movimento continuo sia più lento di un altro, fenomeno che ha indotto il filosofo spagnolo Arriaga e con lui molti altri a sostenere che la lentezza del movimento non è altro che un'interruzione di più quieti, sebbene non possano essere percepite dai sensi, e che sono tanto più lunghe e tanto più frequenti quanto più lento è il movimento.[15]

Lo stesso Galilei riconosce il disagio dell'immaginazione che si accompagna alla fede nella continuità della variazione:

> […] e come la lentezza può aumentare, o la velocità diminuire all'infinito, bisognerà ammettere che il mobile, a un certo punto, avrà avuto un momento di tardità così immenso che, se si fosse mosso con questo per degli interi anni non avrebbe superato lo spazio di un dito.[16]

Il commento di Galilei, diciamo la soluzione che egli propone, riveste per gli obiettivi di questo lavoro una straordinaria importanza:

> […] benché stupefacente a prima vista ciò non è affatto falso; l'esperienza, appena inferiore alla dimostrazione, può dimostrarlo a chiunque.[17]

---

[14] G. Galiei, *Opere*, a cura di A. Favaro, Firenze 1890-1909, vol. II, p. 262.
[15] M. Mersenne, *Harmonie universelle*, Paris 1636, vol. I, p. 74.
[16] G. Galilei, *Opere*, cit., vol. II, p. 263.
[17] *Ibid.*.

Il richiamo all'esperienza è un sorpendente cedimento a un'autorità diversa dalla pura dimostrazione razionale, come se la posta in gioco nel fenomeno del movimento includesse un nucleo non riducibile a concetti del tutto definiti. Sostanzialmente, Galilei invita a *guardare* – anche se, ovviamente, si tratta di un guardare della mente, non degli occhi: un'esperienza galileiana, non aristotelica.

Certo, Galilei continuerà a lungo a riflettere su questo accidente al quale sembra che «assai mal agevolmente s'accomodi l'immaginazione». E cercherà una via d'uscita razionale, dimostrativa, dalle difficoltà. Ma, per quanto egli insista nel tentativo di formulare un ragionamento conclusivo, Zenone torna a contaminare l'esattezza del discorso:

> Ma – obietta l'aristotelico – se i gradi di tardità maggiore e maggiore sono infiniti, già mai non si consumeranno tutti; onde tal grave ascendente non si condurrà mai alla quiete, ma infinitamente si muoverà, ritardandosi sempre: cosa che non si vede accadere.[18]

Siamo ancora nella trappola di Zenone, non sembrano esserci dubbi. E la soluzione di Galilei è vistosamente aristotelica:

> […] accadrebbe questo, sig. Simplicio, quando il mobile andasse per qualche tempo trattenendosi per ciaschedun grado; ma egli vi passa solamente, senza dimorarvi oltre a un istante; e perché in ogni tempo quanto, ancor che piccolissimo, sono infiniti istanti, però son bastanti a rispondere a gl'infiniti gradi di velocità diminuita[19].

Torna, come si vede, la simmetria tra spazio e tempo e la distinzione aristotelica tra potenza e atto. Soprattutto, elemento nuovo, si impone l'esigenza di dire la qualità che distingue l'occupazione immobile di uno spazio dall'occupazione dinamica, vale a dire la velocità istantanea: l'esigenza che apre alla costituzione del calcolo differenziale.

Riassumendo: Galilei inciampa nello scandalo logico degli infiniti gradi di velocità – in altre parole, e di nuovo, nel problema che

---

[18] Galilei, *Opere*, cit., vol. VII, p. 201.
[19] *Ibid.*

sorge dall'ammettere l'infinita suddivisibilità come proprietà essenziale del continuo (e, ovviamente, dall'ammettere la natura continua dei valori della velocità nel passaggio dalla quiete al moto). Scandalo che, dunque, torna a riemergere, quasi come un effetto secondario e necessario, ogni volta che si prova a fare i conti linguisticamente con l'esperienza del moto e con l'idea di continuità che tale esperienza sembra presupporre o costruire. In un certo senso, il problema sarà risolto con il ricorso alla matematica, superando però la matematizzazione estensionale (che, da un certo punto di vista, è lo strumento grazie al quale l'aporia si costituisce) per entrare, almeno come esigenza, nel contesto del calcolo infinitesimale e delle grandezze intensionali, terzo segnavia della strada che stiamo percorrendo.

6. La nascita del calcolo differenziale e la formulazione definitiva di un metodo rigoroso per la trattazione delle grandezze infinitesimali rappresentano il compimento di un percorso iniziato, nella matematica greca, con il metodo di esaustione introdotto da Eudosso e Archimede[20].

Il calcolo infinitesimale si sviluppò, infatti, come soluzione a quattro fondamentali problemi scientifici che, pur formulati con chiarezza definitiva soltanto nel XVII secolo, affondano le loro radici nel pensiero greco.

In primo luogo, come abbiamo visto esemplarmente nel caso di Galilei, il problema del moto, vale a dire la determinazione della velocità istantanea a partire dalla legge oraria (la relazione matematica tra spazio e tempo). Le difficoltà erano legate alla necessità di dar conto della variazione continua della velocità, e dunque alla impossibilità di ricorrere a operazioni algebriche, perfettamente adeguate nel caso della velocità media (rapporto tra incrementi finiti di spazio e tempo), ma evidentemente assurde quando le quantità coinvolte devono essere considerate nulle, come sembra inevitabile se l'intervallo da prendere in considerazione deve ridursi a un punto.

---

[20] Per un'esaustiva indagine storica sulla genesi e sugli effetti filosofici della fondazione del calcolo infinitesimale si veda: L. Geymonat, *Storia e filosofia dell'analisi infinitesimale*, Torino 2008.

Il secondo ambito di problemi ruotava attorno alla definizione e alla determinazione della tangente a una curva. Un tale problema rispondeva sia a questioni interne all'evoluzione della geometria, sia a questioni di carattere più applicativo (per esempio: la necessità di conoscere la tangente o la normale per il problema della rifrazione in ottica e di determinare la tangente a una curva quale direzione istantanea del moto non rettilineo). La nozione e il metodo di calcolo per la tangente, di derivazione greca, erano ormai considerati inadeguati: la definizione usuale di tangente per una conica come retta che "tocca" la curva in un punto e giace interamente da una parte rispetto alla curva non si dimostrava più valida per le curve più complesse in uso già nel XVII secolo e, inoltre, non garantiva una procedura di calcolo efficiente.

Strettamente connessa al problema della tangente era l'elaborazione di strategie di calcolo per la determinazione dei valori di massimo o di minimo di una funzione, fondamentali per le applicazioni pratiche (problema della gittata di un proiettile) e astronomiche (minima e massima distanza di un pianeta dal sole).

Vi era infine la costellazione dei problemi che avrebbero portato alla nascita del calcolo integrale: lunghezze delle curve, aree limitate da curve, baricentri e attrazione gravitazionale esercitata da un corpo non puntiforme.

Malgrado le esigenze concettuali ed epistemologiche alla base del metodo di esaustione siano in qualche modo confrontabili con quelle che hanno condotto alla creazione del calcolo infinitesimale, è tuttavia indiscutibile il salto concettuale compiuto nel passaggio da un graduale perfezionamento della strategia di Eudosso alla vera e propria introduzione della grandezza infinitesimale e del calcolo su di essa fondato. In questo senso, si può dire che il metodo infinitesimale rappresenti la definitiva comprensione matematica dei presupposti del metodo di esaustione e il suo superamento in un contesto più ampio, reso quasi incommensurabile con la matematica precedente dalla introduzione del concetto di limite in quanto effettiva attualizzazione di una procedura potenzialmente infinita.

Nell'ottica del percorso che stiamo svolgendo, il calcolo infinitesimale appare come il tentativo più riuscito – da un punto di vista operativo e tecnico, piuttosto che essenziale – di gestire l'aspetto aporetico di alcune definizioni (grandezze al tempo stesso nulle e non nulle, punti coincidenti eppure distinti, impossibilità di un vero e proprio confronto tra grandezze, somme di infiniti termini con valore finito e definito), insomma di costruire uno strumento in grado di rendere trattabili, anche se non propriamente decifrabili, le proprietà locali del continuo – sempre più chiaramente identificabili con la natura aporetica di quelle definizioni.

In un certo senso, la funzione primaria del calcolo infinitesimale sembra essere quella di permettere un ampliamento del visibile, consentendo così, in qualche modo, un'esperienza percettiva di *due* punti coincidenti eppure non identici, di un contatto geometrico qualitativamente diverso, di un intervallo nullo eppure non riducibile a un punto. Cosicché, fermo restando il carattere aporetico, in termini puramente estensionali, delle definizioni in gioco, il ricorso al calcolo infinitesimale conferma il ruolo conclusivo dell'esperienza (sia pure di un'esperienza aumentata) nella comprensione del continuo.

Le questioni filosofiche connesse all'introduzione del calcolo con le grandezze infinitesimali, in particolare al decisivo passaggio dalla possibilità di reiterare indefinitamente un'operazione di approssimazione alla effettiva attualizzazione di tale procedura, furono inizialmente molto dibattute. Tuttavia, con il progressivo consolidamento delle basi logico/matematiche del calcolo infinitesimale – con il costituirsi di rigorose definizioni in grado di stabilire un accordo univoco circa l'accettabilità di determinate procedure operative – il clamore attorno al metodo differenziale, in quanto problema filosofico, si andò progressivamente spegnendo. Alla metà del XIX secolo la matematica si era definitivamente impadronita del nuovo strumento e le domande circa il senso da attribuire alle grandezze infinitesimali e alle somme infinite erano sempre più marcatamente spinte ai margini del dibattito interno alla matematica.

Sarà Cohen, con la sua epocale rilettura della filosofia kantiana – e, ovviamente, con il testo sul calcolo infinitesimale[21] – a riportare al centro della scena filosofica questa nuova voce della matematica.

---

21 H. Cohen, *Das Prinzip der Infinitesimal-Methode und seine Geschichte*, Berlin 1883; trad. it. di N. Argentieri, *Il principio del metodo infinitesimale e la sua storia*, Firenze 2011.

7. Il lavoro di Cohen poggia sulla profonda connessione tra la categoria di *Realität* e la grandezza intensiva – una connessione stabilita e condizionata dalla nozione di grandezza infinitesimale, concepita come illustrazione, come manifestazione "storica" della grandezza intensiva o, infine, come schema della categoria di realtà: «Da un punto di vista critico-conoscitivo comprendiamo dunque il concetto di infinitesimale come un esempio del principio della grandezza intensiva»[22].

Come ha mostrato l'episodio Galileo, il problema del moto può essere formulato come l'esigenza della restituzione concettuale del passaggio dalla quiete al movimento, vale a dire della comprensione del significato fisico-matematico dell'accelerazione. In tale comprensione, il calcolo infinitesimale si rivela lo strumento decisivo:

> L'accelerazione non può più essere rappresentata in modo sensibile, essa deve piuttosto essere considerata come il momento che porta la datità sensibile alla realtà, come la causa del movimento. Questo ruolo causale dell'accelerazione è l'idea della costituzione infinitesimale»[23].

La descrizione geometrico/estensiva del moto (la *cinematica*) introduce, come un dato primario, la separazione tra il livello geometrico e quello propriamente fisico del fenomeno – tra la sua formalizzazione quantitativa nell'idea di *traiettoria* e l'effettiva esperienza sensibile – creando in questo modo una cesura che si rivela impossibile da colmare (il *disagio dell'immaginazione* di cui parla Galilei). Una tale descrizione non è in grado di restituire la differenza tra un punto spaziale in quanto posizione di un corpo in quiete e un punto spaziale in quanto posizione di un corpo in moto. La traiettoria diventa così semplicemente un insieme di punti successivamente occupati dal corpo, una successione di stati di quiete – per cui diviene inconcepibile che uno spazio finito, ma infinitamente divisibile, venga percorso in un tempo finito. In termini geometrici, prima dell'introduzione delle grandezze infinitesimali, si rivelava impossi-

[22] Ivi, p. 181. Per una lettura più ampia degli obiettivi e dei contenuti del testo di Cohen, mi permetto di rimandare alla mia introduzione all'opera citata.
[23] Ivi, p. 90.

bile comprendere come dei punti privi di estensione potessero costituire una linea di lunghezza diversa da zero. In termini fisici, non si riusciva a dar conto della continuità del movimento, del fatto che un corpo in moto potesse occupare un punto spaziale secondo modalità "diverse" da quelle di un corpo in quiete: esattamente la differenza che definisce il modo d'essere del continuo.

La realtà ha un *grado*, questo il contenuto essenziale del principio kantiano delle anticipazioni, una qualità inaccessibile alla grandezza estensiva della cinematica e che non può essere recuperata *a posteriori*, come un'aggiunta contingente alla forma estensionale dell'intuizione pura, ma deve essere anticipata in uno strumento *a priori* del pensiero, in grado di conferire oggettività e conoscibilità al dato sensibile: «Per poter attribuire alle cose lo *status* di corpi fisici, di oggetti reali, fu necessario il calcolo infinitesimale»[24].

Bisogna dunque concepire i punti inestesi come già dotati di una proprietà che li renda capaci di generare l'estensione: l'infinitesimo assume la funzione di un elemento generatore di grandezze finite, un ente la cui grandezza (estensiva) è pari a zero, ma che possiede, in grado maggiore o minore (o nullo), la tendenza a generare grandezze. Non qualcosa di "piccolo", ma una grandezza qualitativamente diversa, una grandezza intensiva; in altri termini, il continuo:

> Nel caso dell'accelerazione [...] l'inclusione dell'infinitesimale è fin dall'inizio ineludibile, perché essa, nella determinazione dello spazio di caduta, entra nel problema della costituzione del continuo reale, ne rappresenta anzi la svolta decisiva. [...] La forza di questa idea si rivela nel principio d'inerzia e, in particolare per il moto, nella permanenza della direzione e della velocità. Questo principio è notoriamente un paradosso, perché appare evidente solo nel caso della quiete. Ma il paradosso è superato grazie alla stessa idea che ha permesso di risolvere il problema delle tangenti. Il proseguimento rettilineo del moto non è altro che il presupposto infinitesimale per cui ogni punto indivisibile della linea in movimento è una retta. Questo concetto di "rettilineità" infinitesimale mette quindi fuori gioco la freccia in volo di Zenone. Mediante

[24] Ivi, p. 66.

tale generazione continua, che include la permanenza, il continuo guadagna la precisione del concetto[25].

L'infinitesimale, in quanto strumento operativo della categoria della *Realität*, si contrappone dunque alla mera esistenza della *Wirklichkeit* e alla geometrizzazione estensionale che le corrisponde:

> L'intensivo è il primo frutto del principio di continuità. Finché il passaggio da punto a punto, da unità a unità è rappresentato solo negativamente, vale a dire non come un salto, il metodo dei limiti, che in linea di principio non esclude l'estensione intuitiva, si rivela sufficiente. Considerando però il metodo infinitesimale nel suo rigore di principio, come manifestazione del principio di continuità, la grandezza basata sull'estensione è definitivamente superata, perché la continuità non si basa sull'intuizione spaziale: essa è, piuttosto, un più generale presupposto della coscienza che deve esser fatto valere nell'astrazione concettuale e che, come tale, deve essere incluso tra le condizioni dell'intuizione in vista di una sua più pura considerazione[26].

Il continuo, come categoria, come *Denk-Mittel*, anticipa e condiziona l'intuizione della realtà sensibile. Di conseguenza, qualsiasi tentativo di recuperarlo concettualmente *a posteriori* si scontra con gli esiti aporetici di una metabasi trascendentale, per cui una condizione della struttura gnoseologica del reale diviene oggetto positivo di un'indagine conoscitiva. Questo sembra essere, nella lettura di Cohen, il difetto, o il risultato, degli argomenti di Zenone.

8. Con nitidezza crescente, il continuo tende dunque a configurarsi come *altro*: rispetto alla matematizzazione puramente estensionale, rispetto alla possibilità dell'infinita suddivisione, rispetto alla mera presenza spazio-temporale, forse rispetto all'esperienza. L'ultimo passaggio teorico che vorrei chiamare in causa rappresenta probabilmente la formulazione più esplicita di questa alterità del continuo, di questa differenza che ne definisce, localmente, i tratti essenziali.

---

[25] Ivi, p. 91.
[26] *Ibid.*

Mi riferisco al più compiuto tentativo di costruire una caratterizzazione formale dell'insieme dei numeri reali, un lavoro decisivo per la riformulazione rigorosa dei concetti fondamentali della matematica, legato principalmente ai nomi di Dedekind e Cantor[27]. Si tratta ovviamente di un lavoro tecnicamente complesso, che richiederebbe un'ampia digressione, probabilmente non funzionale agli obiettivi di questo breve scritto. Limitiamoci dunque a cogliere il contenuto essenziale del risultato ottenuto dalla matematica alle soglie del XX secolo.

Come abbiamo visto, già Aristotele tendeva a identificare il tratto costitutivo della continuità, da un punto di vista locale, con la possibilità, sia pure inattuabile nella sua completezza, di una infinita suddivisione. Sostanzialmente, questa caratterizzazione del continuo è rimasta immutata fino alla fine del XIX secolo – e probabilmente anche dopo, perlomeno al di fuori del pensiero più propriamente matematico (e, come Cohen ha messo in mostra, della filosofia kantiana). La "scoperta" di Cantor è, in questo senso, molto profonda, sorprendente e difficilmente gestibile in termini intuitivi. L'idea è che la proprietà della indefinita suddivisione si applichi anche a insiemi che, propriamente, non hanno natura continua. Questo significa, molto semplicemente, che quella proprietà non definisce il continuo. La possibilità della suddivisione caratterizza, ovviamente, l'insieme dei numeri razionali; ma i numeri razionali, malgrado questa caratteristica, non hanno la potenza del continuo: la loro "compattezza", la loro vicinanza potenzialmente infinita, non garantisce l'assenza di "vuoti" tra un numero e l'altro.

(Di queste lacune, l'irrazionalità della radice quadrata di due rappresenta solo il caso più celebre ed esemplare. In effetti le lacune sono infinite; e, risultato ben più sconcertante, il loro numero è radicalmente superiore a quello dei "pieni": la struttura compatta dei numeri razionali si rivela, a uno sguardo più attento, percorsa da un intreccio non eliminabile di cunicoli, grotte, gallerie. Con una formula per noi più immediatamente utilizzabile: l'insieme dei numeri

---

[27] Il testo di riferimento per Dedekind è: R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen*, Berlin 1888. Per Cantor, è disponibile in italiano: G. Cantor, *La formazione della teoria degli insiemi (scritti 1872-1899)*, a cura di G. Rigamonti, Sesto San Giovanni 2012.

razionali, traduzione aritmetica dell'immagine della suddivisione indefinita, è ben lontano dall'essere un insieme continuo; tra i suoi elementi manca quella contiguità perfetta che intuitivamente attribuiamo alle figure continue, prima fra tutte il movimento).

Se le cose stanno così, e le dimostrazioni di Cantor non sembrano lasciare dubbi su questo, la definizione aristotelica manca clamorosamente il bersaglio. Il continuo emerge come una proprietà irriducibile alla possibilità della suddivisione, come un *di più* quantitativo destinato inevitabilmente a confermare il disagio dell'immaginazione, la quale può soltanto fingere di *vedere* il vuoto disponibile tra numeri infinitamente vicini. Tanto che, probabilmente, il passaggio dai numeri razionali a quelli reali, dunque l'entrata in scena del continuo, può meglio essere concepita come una differenza qualitativa, un salto di livello concettualmente molto sfuggente.

9. L'esito complessivo delle cinque scene che abbiamo preso in considerazione è dunque chiaro: il continuo si dice in molti modi, per parafrasare una formula celebre e certo non estranea al contesto in esame. Perché molti sono i modi di dare forma linguistica alla presenza e al ruolo del continuo nell'esperienza e nella conoscenza: come potenza, come sostrato, come aporia logica, come grandezza intensiva, come categoria, come esperienza.

Una tale molteplicità appare legata alla resistenza che il continuo oppone al passaggio dallo *status* di condizione a quello di soggetto di predicazioni, da presupposto indeterminato dell'esperienza spazio-temporale all'oggetto di una teorizzazione formale. Come dire: possiamo definire il continuo solo mediante ciò che in esso può accadere. Ma se questo accade realmente, non abbiamo più nessun continuo. Si tratta proprio dell'attrito che genera i paradossi e quel disagio dell'immaginazione che assedia qualunque tentativo di definizione compiuta.

Forse, si potrebbe pensare, ciò che si prova a dire non è sempre ciò che andrebbe detto: la distinzione cantoriana tra denso e continuo ci ha messo in guardia, la proprietà essenziale potrebbe non essere la possibilità di un'infinita suddivisione. E anche la geometrizzazione del tempo, altra figura fondamentale del movimento, potrebbe rivelarsi lo schermo che offusca il nostro sguardo sull'esperienza. C'è, forse, un *mito del continuo* che disturba la possibilità di pensare propriamente il fenomeno, in prima istanza così famigliare, del movimento[28].

Affiora così un'ipotesi, ancora incolore e incerta: la possibilità che il continuo sia definito da una forma di *differenza ontologica*, per cui l'alterità, l'eccesso che il continuo introduce rispetto al misurabile è un'alterità qualitativa, come per altro già emerso, non quantitativa. In questo senso, il continuo si rivela un tratto essenziale dell'Essere; una forza che lega, che vincola, una potenza relazionale:

> E i sapienti dicono, o Callicle, che cielo, terra, dei e uomini sono tenuti insieme (*synechein*) dalla comunanza, dall'amicizia, dalla temperanza e dalla giustizia; ed è proprio per tale ragione, o amico, che essi chiamano questo intero cosmo, ordine, e non invece disordine o dissolutezza.[29]

Se, dunque, ciò che Zenone mette in scena fosse questa differenza ontologica? Se, in altri termini, la dialettica locale/globale rimandasse a una differenza ontologica? *Dire* il continuo significa negare la differenza ontologica, tematizzare illegittimamente un tratto essenziale dell'Essere. Il continuo si dice in molti modi perché, propriamente, *il continuo non si dice*.

In definitiva, sembra che Zenone avesse ragione.

[28] Cfr. G. Longo, *Il "mito del continuo" tra filosofia e scienza*, disponibile on-line alla pagina personale dell'autore: http://www.di.ens.fr/users/longo.

[29] Platone, *Gorgia*, 508a; trad. it. di G. Reale, *Gorgia*, Milano 2001.